数理解析研究所講究録
990 巻 1997 年 31-40

前処理反復法について
On the preconditioned iterative methods

河野敏行*, 仁木　滉（岡山理科大学）
Toshiyuki Kohno, Hiroshi Niki(Okayama University of Science)

1 前処理反復法

線型方程式$Ax=b$をより速く反復法で解くために前処理を用いる．ここで前処理行列をPとするとき，前処理された線型方程式は次式となる，

$$PAx = Pb. \tag{1}$$

1991年修正反復法として$P=(I+S)$が用いられた[1]，ここでSは行列Aの対角要素一つ上の値に-1を乗算したものである．このときのGauss-Seidel反復行列T_Sは$A=I-L-U$に対して次のように表される，

$$T_S = (I-L-SL)^{-1}(U-S+SU), \tag{2}$$

Iは単位行列; L, Uはそれぞれ$-A$の狭義下三角，狭義上三角行列である．このとき(2)から，前処理行列Pに対して$(I-PL)^{-1}$が存在するならば前処理付Gauss-Seidel反復行列T_Pが得られる，

$$T_P = (I-PL)^{-1}\{(I-P)+PU\}. \tag{3}$$

(3)を基に前処理行列Pの選び方によって各種の前処理付反復法が示される．

2 前処理パラメータ

前処理としてパラメータを考える．最初に，パラメータωを用いて次のような対角行列を考える，

$$P = \omega I.$$

このときの反復行列T_ωは次式で与えられ，良く知られているSOR反復行列となる，

$$T_\omega = (I-\omega L)^{-1}\{(1-\omega)I+\omega U\}. \tag{4}$$

次に各行でパラメータの値を変化させた場合，すなわち
$P=\Omega=diag(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)$を用いるならば次式を得る，

$$T_\Omega = (I-\Omega L)^{-1}\{(I-\Omega)+\Omega U\}.$$

*日本学術振興会特別研究員

3 前処理行列

前処理行列$P=(I+U)$に対しては次式が得られる，

$$T_{SU}=(I-L-UL)^{-1}U^2. \tag{5}$$

また(1)において$P=(I+U)$を用いた場合のGauss-Seidel反復行列は次式となる[2],

$$T_U=(I-D-L-E)^{-1}(F+U^2), \tag{6}$$

ただし，D,E,Fは$UL=D+E+F$の対角，狭義下三角，狭義上三角行列である．

4 パラメータ付き前処理行列

前処理行列としてパラメータ$\alpha_i,\beta_i,1\le i\le n-1$を持つ$P=(I+\alpha S)$と$P=(I+\beta U)$の場合を考える．このとき

$$\alpha=\begin{pmatrix}\alpha_1 &&&& \\ & \alpha_2 &&& \\ && \ddots && \\ &&& \alpha_{n-1} & \\ &&&& 0\end{pmatrix},\quad \beta=\begin{pmatrix}\beta_1 &&&& \\ & \beta_2 &&& \\ && \ddots && \\ &&& \beta_{n-1} & \\ &&&& 0\end{pmatrix}.$$

である．

すなわち，そのGauss-Seidel反復行列はそれぞれ,

$$\begin{aligned}T_\alpha &= (I-(I+\alpha S)L)^{-1}[\{I-(I+\alpha S)\}+(I+\alpha S)U],\\ T_\beta &= (I-\beta D-L-\beta E)^{-1}\{(I+\beta U)U-\beta U+\beta F\}.\end{aligned}$$

で与えられる．これらの方法に対する収束定理は[3][4]で示されている．
収束定理で用いる重要な補題を示す．

補題 1 $\tilde{A}=\tilde{D}-\tilde{E}-\tilde{F}$は狭義優対角*Z*行列とする．ただし,$\tilde{D}$, $\tilde{E}$, $\tilde{F}$はそれぞれ$\tilde{A}$の対角, 狭義下三角と狭義上三角行列である．そのとき*Gauss-Seidel*反復行列$\tilde{T}$のスペクトル半径の上限は

$$\rho(\tilde{T})\le\max_i\frac{\tilde{f}_i}{\tilde{d}_i-\tilde{e}_i}$$

で与えられる．ただし, $\tilde{d}_i$, $\tilde{e}_i$, $\tilde{f}_i$はそれぞれ$\tilde{D}$, $\tilde{E}$, $\tilde{F}$のi行目の要素の和である．

4.1 $(I+\alpha S)$に対する収束定理

前処理された行列を$A(\alpha)=(I+\alpha S)A$と置く．このとき$A(\alpha)=D(\alpha)-E(\alpha)-F(\alpha)$と分解される，ただし$D(\alpha)$， $-E(\alpha)$， $-F(\alpha)$は$A(\alpha)$の対角，狭義下三角，狭義上三角

行列である．
このとき，$A(\alpha)=(\bar{a}_{ij})$ の各要素は次のように表される，

$$\bar{a}_{ij}=\begin{cases} a_{ij}-\alpha_i a_{ii+1}a_{i+1j}, & 1\le i<n, \\ a_{nj}. & i=n \end{cases} \tag{7}$$

もし，A が優対角 Z-matrix ならば次の関係が得られる，

$$\begin{aligned} 0\le a_{ii+1}a_{i+1j}\le 1, &\quad \text{for } j\ne i+1, \\ -1\le a_{ii+1}a_{i+1i+1}\le 0. & \end{aligned} \tag{8}$$

従って，以下の不等式が満たされる;

$$\begin{cases} a_{ii+1}a_{i+1i}\ge 0 \\ a_{ii+1}\sum_{j=1}^{i-1}a_{i+1j}\ge 0, \\ a_{ii+1}\sum_{j=i+1}^{n}a_{i+1j}\le 0 \end{cases} \quad 1\le i<n.$$

簡単のために次の記号を用いる:

$$\begin{cases} p_i=a_{ii+1}a_{i+1i} \\ q_i=a_{ii+1}\sum_{j=1}^{i-1}a_{i+1j}, \\ r_i=a_{ii+1}\sum_{j=i+1}^{n}a_{i+1j} \end{cases} \quad \text{for } 1\le i<n,$$

そして，

$$\begin{cases} p_n=0, \\ q_n=0, \\ r_n=0. \end{cases}$$

である．このとき，以下の不等式が満たされる，

$$p_i+q_i+r_i=a_{ii+1}\sum_{j=1}^{n}a_{i+1j}\le 0, \quad 1\le i<n.$$

さらに，もし $i<n$ に対して $a_{ii+1}\ne 0$ そして $\sum_{j=1}^{n}a_{i+1j}<0$ ならば次の関係を得る

$$p_i+q_i+r_i<0, \quad \text{for some } i<n. \tag{9}$$

定理 2 A は対角が1である正則な優対角 *Z-matrix* かつ $\sum_{j=1}^{n}a_{nj}>0$ を満たしているとする．もし，$i<n$ に対して $\sum_{j=1}^{n}a_{ij}=0$ ならば $\sum_{j=1}^{n}a_{i+1j}>0$ であると仮定する．そのとき $A(\alpha)$ は 狭義優対角 *Z-matrix* そして $0\le\alpha_i\le 1$（$1\le i<n$）に対して $\rho(T(\alpha))<1$ である．

証明. $d(\alpha)_i$, $l(\alpha)_i$, $u(\alpha)_i$ は行列 $D(\alpha)$, $L(\alpha)$, $U(\alpha)$ の各 i 行での要素の和である. このとき, 以下の等式が満たされる,

$$\begin{aligned} d(\alpha)_i &= \bar{a}_{ij} = 1 - \alpha_i p_i, \quad 1 \le i \le n, \\ l(\alpha)_i &= -\sum_{j=1}^{i-1} \{\bar{a}_{ij}\} = l_i + \alpha_i q_i, \quad 1 \le i \le n, \\ u(\alpha)_i &= -\sum_{j=i+1}^{n} \{\bar{a}_{ij}\} = u_i + \alpha_i r_i, \quad 1 \le i \le n, \end{aligned} \tag{10}$$

ただし, l_i, u_iは$A = I - L - U$の行列L, Uの各i行での要素の和である. 仮定と(8)からA は優対角 Z-matrixであるので, 以下の関係が満たされる,

$$\begin{aligned} 1 - \alpha_i a_{ii+1} a_{i+1j} > 0, &\quad \text{for } j = i, \\ -(a_{ij} - \alpha_i a_{ii+1} \sum_{k=1}^{i-1} a_{i+1k}) \ge 0, &\quad \text{for } i > j. \\ -[(1-\alpha_i) a_{ij} - \alpha_i a_{ii+1} \sum_{k=i+2}^{n} a_{i+1k}] \ge 0, &\quad \text{for } i < j. \end{aligned}$$

従って, $l(\alpha)_i \ge 0, u(\alpha)_i \ge 0$ そして $A(\alpha)$ は Z-matrixである.
さらに, (9) と仮定から,次のことが容易に求まる,

$$d(\alpha)_i - l(\alpha)_i - u(\alpha)_i = (d_i - l_i - u_i) - \alpha_i(p_i + q_i + r_i) > 0, \quad \text{for all } i. \tag{11}$$

それゆえ, $A(\alpha)$ は優対角の条件を満たしている. $u(\alpha)_i \ge 0$から, 次式を得る,

$$d(\alpha)_i - l(\alpha)_i > u(\alpha)_i \ge 0, \qquad \text{for all } i.$$

すなわち, これは次のことを示している,

$$\frac{u(\alpha)_i}{d(\alpha)_i - l(\alpha)_i} < 1. \tag{12}$$

従って, 補題1より$\rho(T(\alpha)) < 1$が示される. ■

定理 3 Aが定理2の条件を満たしているとする. $\alpha_i' = \frac{1-l_i-u_i-2a_{ii+1}}{p_i+q_i+r_i-2a_{ii+1}}(1 \le i < n)$とおく. このとき $\alpha_i' > 1$であり, $A(\alpha)$ は狭義優対角行列であり, $1 \le \alpha_i < \alpha_i'$ に対して $\rho(T(\alpha)) < 1$ を満たす.

証明. $\sum_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{n} a_{i+1j} \le 0$であるから次式を得る,

$$\begin{aligned} p_i + q_i + r_i - 2a_{ii+1} &= a_{ii+1}(\sum_{j=1}^{n} a_{i+1j} - 2) \\ &= a_{ii+1}(\sum_{\substack{j=1 \\ j \ne i+1}}^{n} a_{i+1j} - 1) > 0, \quad \text{for } 1 \le i < n, \end{aligned} \tag{13}$$

そして, $p_i+q_i+r_i<0$ から

$$1-l_i-u_i-2a_{ii+1}>p_i+q_i+r_i-2a_{ii+1}>0, \quad \text{for } 1\le i<n,$$

である. これは次式を示している,

$$\frac{1-l_i-u_i-2a_{ii+1}}{p_i+q_i+r_i-2a_{ii+1}}>1, \quad \text{for } 1\le i<n.$$

従って $\alpha_i'>1(1\le i<n)$ である. ここで

$$\bar{u}(\alpha)_i=\sum_{j=i+1}^{n}|a_{ij}-\alpha_i a_{ii+1}a_{i+1j}|, \quad \text{for } 1\le i<n$$

とおく. このとき $\alpha_i>1$ $(1\le i<n)$ に対して以下の関係が満たされる,

$$\begin{aligned}\bar{u}(\alpha)_i &= |(1-\alpha_i)a_{ii+1}|+\sum_{j=i+2}^{n}|a_{ij}-\alpha_i a_{ii+1}a_{i+1j}|\\ &= (1-\alpha_i)a_{ii+1}-\sum_{j=i+2}^{n}\{a_{ij}-\alpha_i a_{ii+1}a_{i+1j}\}\\ &= 2(1-\alpha_i)a_{ii+1}-\sum_{j=i+1}^{n}\{a_{ij}-\alpha_i a_{ii+1}a_{i+1j}\}\\ &= (u_i+2a_{ii+1})+\alpha_i(r_i-2a_{ii+1})\ge 0. \end{aligned} \tag{14}$$

従って (10), (14) から容易に $1\le\alpha_i<\alpha_i'(1\le i<n)$ の範囲で次式が成り立つ,

$$\begin{aligned}d(\alpha)_i-l(\alpha)_i-\bar{u}(\alpha)_i &= (1-l_i)-\alpha_i(p_i+q_i)-(u_i+2a_{ii+1})-\alpha_i(r_i-2a_{ii+1})\\ &= (1-l_i-u_i-2a_{ii+1})-\alpha_i(p_i+q_i+r_i-2a_{ii+1})>0.\end{aligned}$$

従って, $A(\alpha)$ は狭義優対角行列である. そしてこのとき以下の不等式が満たされる,

$$\rho(T(\alpha))\le\frac{\bar{u}(\alpha)_i}{d(\alpha)_i-l(\alpha)_i}<1, \quad \text{for } 1\le\alpha_i\le\alpha_i'(1\le i\le n).$$

従って, 補題1より $1\le\alpha_i<\alpha_i'(1\le i<n)$ に対して $\rho(T(\alpha))<1$ が導かれる. ■

4.2 $(I+\beta U)$ に対する収束定理

前処理された行列を $A_\beta=(I+\beta U)A$ とおく. そして $A_\beta=D_\beta-L_\beta-U_\beta$ と分離する. ただし, D_β, $-L_\beta$, $-U_\beta$ はそれぞれ A_β の対角, 狭義下三角と狭義上三角行列である. そのとき, A_β の各要素は

$$a_{ij}-\beta_i\sum_{k=i+1}^{n}a_{ik}a_{kj}, \tag{15}$$

である. ただし,$i=n$ のとき A_β の各要素は元の a_{nj} である. 以後の証明を簡単にするため次の記法を用いる.

$$\begin{cases} x_i^a=\displaystyle\sum_{k=i+1}^{n}a_{ik}a_{ki},\\ y_i^a=\displaystyle\sum_{j=1}^{i-1}\sum_{k=i+1}^{n}a_{ik}a_{kj},\\ z_i^a=\displaystyle\sum_{j=i+1}^{n}\sum_{k=i+1}^{n}a_{ik}a_{kj}.\end{cases}$$

補題 4 Aを単位対角要素を持つ既約優対角Z行列とする．$i = n$ は狭義優対角とする．そして，各$i < n$に対して，$a_{il} \neq 0$ かつ $\sum_{j=1}^{n} a_{lj} \neq 0$ を満たすある整数 $l > i$ が存在すると仮定する．そのとき，$0 \leq x_i^a < 1$, $y_i^a \geq 0$, $z_i^a < 0$, $x_i^a + y_i^a + z_i^a < 0$である．

証明 仮定から，各$i < n-1$に対して

$$0 \leq a_{ik}a_{kj} \leq |a_{kj}| \leq 1, \quad k = i+1, \ldots, n-1, j = 1, \ldots, i$$

であり，

$$0 \leq a_{in}a_{nj} < |a_{nj}| < 1, \quad i \geq j$$

である．従って，$i \geq j$ に対して次の不等式が成立する：

$$0 \leq \sum_{k=i+1}^{n} a_{ik}a_{kj} < \sum_{k=i+1}^{n} |a_{kj}| \leq 1 \tag{16}$$

それゆえに，$0 \leq x_i^a < 1$ と $y_i^a \geq 0$を得る．さらに，仮定から 各$i < n$ に対して，$-1 < a_{il} < 0$ を満たすある整数 $l > i$ が存在する．よって，

$$z_i^a = a_{il} \sum_{j=i+1}^{n} a_{lj} + \sum_{\substack{k=i+1 \\ k \neq l}}^{n} a_{ik} \sum_{j=i+1}^{n} a_{kj} < 0.$$

従って次式が得られる．

$$x_i^a + y_i^a + z_i^a = a_{il} \sum_{j=1}^{n} a_{lj} + \sum_{\substack{k=i+1 \\ k \neq l}}^{n} a_{ik} \sum_{j=1}^{n} a_{kj} < 0. \blacksquare$$

定理 5 Aを単位対角要素を持つ既約優対角Z行列とする．$i = n$ は狭義優対角とする．そして，各$i < n$に対して，$a_{il} \neq 0$ かつ $\sum_{j=1}^{n} a_{lj} \neq 0$ を満たすある整数 $l > i$ が存在すると仮定する．そのとき，$0 < \beta_i \leq 1$ に対して A_βは狭義優対角 Z行列となり，$\rho(T_\beta) < 1$である．

証明 l_i, u_i, $d_{\beta,i}$, $l_{\beta,i}$, $u_{\beta,i}$ をそれぞれL, U, D_β, L_β, U_βのi行目の要素の和とする．(15)式より次の等式が成り立つ．

$$d_{\beta,i} = 1 - \beta_i \sum_{k=i+1}^{n} a_{ik}a_{ki} = 1 - \beta_i x_i^a, \tag{17}$$

$$l_{\beta,i} = -\sum_{j=1}^{i-1} \left\{ a_{ij} - \beta_i \sum_{k=i+1}^{n} a_{ik}a_{kj} \right\} = l_i + \beta_i y_i^a, \tag{18}$$

$$u_{\beta,i} = -\sum_{j=i+1}^{n} \left\{ a_{ij} - \beta_i \sum_{k=i+1}^{n} a_{ik}a_{kj} \right\} = u_i + \beta_i z_i^a. \tag{19}$$

さらに補題 4から，$0 < \beta_i \leq 1$に対してA_βの対角要素は，

$$1 - \beta_i \sum_{k=i+1}^{n} a_{ik}a_{ki} = 1 - \beta_i x_i^a > 0,$$

非対角要素は,

$$a_{ij}-\beta_i\sum_{k=i+1}^{n}a_{ik}a_{kj}\le 0,$$

となる.従って, $l_{\beta,i}\ge 0$, $u_{\beta,i}\ge 0$ であり A_β はZ行列である. また,補題 4 から

$$d_{\beta,i}-l_{\beta,i}-u_{\beta,i}=(1-l_i-u_i)-\beta_i(x_i^a+y_i^a+z_i^a)>0 \tag{20}$$

が得られる. それゆえに, A_β は狭義優対角Z行列である. このとき, (20) 式と $u_{\beta,i}\ge 0$ から

$$d_{\beta,i}-l_{\beta,i}>u_{\beta,i}\ge 0,$$

すなわち

$$\frac{u_{\beta,i}}{d_{\beta,i}-l_{\beta,i}}<1,$$

を得る. それゆえに, 補題 1 から $\rho(T_\beta^a)<1$ を得る. ■

定理 6 Aを単位対角要素を持つ既約優対角Z行列とする.$i=n$ は狭義優対角とする. そして,各$i<n$に対して,$a_{il}\ne 0$ かつ $\sum_{j=1}^{n}a_{lj}\ne 0$ を満たすある整数 $l>i$ が存在すると仮定する.そのとき, $\beta_i'=\frac{1-l_i+u_i}{x_i^a+y_i^a+z_i^a+2u_i}>1$ であり, $1\le\beta_i<\beta_i'$ に対してA_βは狭義優対角行列となり,$\rho(T_\beta)<1$である.

証明 (20) 式から

$$(1-l_i-u_i)-(x_i^a+y_i^a+z_i^a)=(1-l_i+u_i)-(x_i^a+y_i^a+z_i^a+2u_i)>0$$

となる. 更に, $u_i+z_i^a\ge 0$であるから,

$$1-l_i+u_i>x_i^a+y_i^a+z_i^a+2u_i>0$$

となり次の不等式が得られる.

$$\frac{1-l_i+u_i}{x_i^a+y_i^a+z_i^a+2u_i}>1$$

従って, $\beta_i'=\frac{1-l_i+u_i}{x_i^a+y_i^a+z_i^a+2u_i}$ と置くことによって $\beta_i'>1$が得られる.
 $1\le\beta_i<\beta_i'$とする. このとき補題 4 から,次の不等式が成立する.

$$1-\beta_i\sum_{k=i+1}^{n}a_{ik}a_{ki}=1-\beta_i x_i^a\ge 1-\beta_i' x_i^a>\frac{x_i^a l_i+y_i^a+(u_i+z_i^a)+u_i(1-x_i^a)}{x_i^a+y_i^a+z_i^a+2u_i}>0.$$

(16) 式から

$$a_{ij}-\beta_i\sum_{k=i+1}^{n}a_{ik}a_{kj}\le 0\quad (i>j).$$

従って, (17) 式と (18) 式から $d_{\beta,i}>0$ かつ $l_{\beta,i}\ge 0$である. また

$$\begin{aligned} d_{\beta,i}-l_{\beta,i} &= 1-\beta_i x_i^a-l_i-\beta_i y_i^a \\ &= (1-l_i)-\beta_i(x_i^a+y_i^a) \\ &\ge (1-l_i)-\beta_i'(x_i^a+y_i^a)>0. \end{aligned}$$

となる. ここで

$$\bar{u}_{\beta,i} = \sum_{j=i+1}^{n} \left| a_{ij} - \beta_i \sum_{k=i+1}^{n} a_{ik} a_{kj} \right|. \tag{21}$$

そのとき,次の関係が成り立つ.

$$\begin{aligned}
\bar{u}_{\beta,i} &= \sum_{j=i+1}^{n} \left| (1-\beta_i) a_{ij} - \beta_i \sum_{k=i+1,k\neq j}^{n} a_{ik} a_{kj} \right| \\
&\leq \sum_{j=i+1}^{n} \left\{ |(1-\beta_i) a_{ij}| + |\beta_i \sum_{k=i+1,k\neq j}^{n} a_{ik} a_{kj}| \right\} \\
&= \sum_{j=i+1}^{n} (1-\beta_i) a_{ij} + \beta_i \sum_{j=i+1}^{n} \sum_{k=i+1,k\neq j}^{n} a_{ik} a_{kj} \\
&= \beta_i (2u_i + z_i^a) - u_i.
\end{aligned}$$

そして

$$\begin{aligned}
d_{\beta,i} - l_{\beta,i} - \bar{u}_{\beta,i} &\geq (1-l_i) - \beta_i (x_i^a + y_i^a) - \beta_i (2u_i + z_i^a) + u_i \\
&= (1 - l_i + u_i) - \beta_i (x_i^a + y_i^a + z_i^a + 2u_i) > 0.
\end{aligned} \tag{22}$$

従って,A_βは狭義優対角行列である. このとき, $\bar{u}_{\beta,i} \geq 0$ から

$$d_{\beta,i} - l_{\beta,i} > \bar{u}_{\beta,i} \geq 0.$$

これは

$$\frac{\bar{u}_{\beta,i}}{d_{\beta,i} - l_{\beta,i}} < 1 \tag{23}$$

を意味している. 従って,補題 1 から $1 < \beta_i < \beta_i'$に対して$\rho(T_\beta^a) < 1$を得る.■

4.3 α_iとβ_i の推定

α_iの決定式

(14) の等号が満たされるようにα_iを決定する，すなわち

$$(u_i + 2a_{ii+1}) + \alpha_i (r_i - 2a_{ii+1}) = 0, \quad 1 \leq i < n.$$

を解くことによって次式が得られる,

$$\alpha_i = \frac{u_i + 2a_{ii+1}}{2a_{ii+1} - r_i}, \quad 1 \leq i \leq n-1 \tag{24}$$

β_iの決定式

次に, β_i の推定法を述べる. $i < n$ に対して, 反復行列のスペクトル半径の上限式

$$\max_i \frac{\bar{u}_{\beta,i}}{d_{\beta,i} - l_{\beta,i}}$$

の最小化を考える.ここでは, 分子の最小化を考える. そのために, $\bar{u}_{\beta,i}$ の振舞いを調べる.
(21) 式から,
$0 \le \beta_i \le 1$ の場合:

$$\begin{aligned}
\bar{u}_{\beta,i} &= \sum_{j=i+1}^{n} \left| (1-\beta_i)a_{ij} - \beta_i \sum_{k=i+1,k\neq j}^{n} a_{ik}a_{kj} \right| \\
&= -\sum_{j=i+1}^{n} \left\{ (1-\beta_i)a_{ij} - \beta_i \sum_{k=i+1,k\neq j}^{n} a_{ik}a_{kj} \right\} \\
&= -\sum_{j=i+1}^{n} \left\{ a_{ij} - \beta_i \sum_{k=i+1}^{n} a_{ik}a_{kj} \right\} \\
&= u_i + \beta_i z_i^a. \qquad (25)
\end{aligned}$$

となる.
$\beta_i \ge 1$ の場合:

$$\begin{aligned}
\bar{u}_{\beta,i} &= \sum_{j=i+1}^{n} \left| (1-\beta_i)a_{ij} - \beta_i \sum_{k=i+1,k\neq j}^{n} a_{ik}a_{kj} \right| \\
&\ge \sum_{j=i+1}^{n} \left\{ |(1-\beta_i)a_{ij}| - |\beta_i \sum_{k=i+1,k\neq j}^{n} a_{ik}a_{kj}| \right\} \\
&= (1-\beta_i)\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} - \beta_i \sum_{j=i+1}^{n}\sum_{k=i+1,k\neq j}^{n} a_{ik}a_{kj} \\
&= -u_i - \beta_i z_i^a. \qquad (26)
\end{aligned}$$

となる. このとき, (25), (26) から 各 $i < n$ に対する $\bar{u}_{\beta,i}$ の下限は $\beta_i = -\frac{u_i}{z_i^a}$ のとき 0 となる.
ここで,

$$\frac{1-l_i+u_i}{x_i^a+y_i^a+z_i^a+2u_i} - \left(-\frac{u_i}{z_i^a}\right) = \frac{z_i^a(1-l_i+u_i)+u_i(x_i^a+y_i^a+z_i^a)+2u_iu_i}{(x_i^a+y_i^a+z_i^a+2u_i)z_i^a}$$

から, 各 $i < n$ に対して $|z_i^a(1-l_i+u_i)+u_i(x_i^a+y_i^a+z_i^a)| > 2u_iu_i$ が成立するとき, $\beta_i = -\frac{u_i}{z_i^a}$ は (22) 式の関係を満たす事が分かる. 以下に推定法のアルゴリズムを示す.

1. 各 $i < n$ に対して $z_i^a = \sum_{j=i+1}^{n}\sum_{k=i+1}^{n} a_{ik}a_{kj}$ を計算する.
2. 各 $i < n$ に対して $u_i = -\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}$ と $\beta_i = -\frac{u_i}{z_i^a}$ を計算する.

5 数値結果

我々のパラメータの決定式の有効性を示すために, 以下に示すような密な狭義優対角

Z-matrixに対する数値結果をTable 1に示す，

$$A = \begin{pmatrix} 1 & c_1 & c_2 & c_3 & c_1 & \cdots \\ c_3 & 1 & c_1 & c_2 & \ddots & c_1 \\ c_2 & c_3 & \ddots & \ddots & \ddots & c_3 \\ c_1 & \ddots & \ddots & 1 & c_1 & c_2 \\ c_3 & \ddots & c_2 & c_3 & 1 & c_1 \\ \cdots & c_3 & c_1 & c_2 & c_3 & 1 \end{pmatrix},$$

ここで $c_1 = \frac{-1}{n}$, $c_2 = \frac{-1}{n+1}$ and $c_3 = \frac{-1}{n+2}$である．収束判定は$10E-6$を用い，時間は秒である．比較のためにGaussian EliminationとSORの結果をTable 1' に示す．

Table 1 Z-matrix

n	$Q=(I+\alpha S)$						$Q=(I+\beta U)$					
	optimum		est.α_i		$\alpha=1$		$\beta=1$		est. β_i		optimum	
	ite.(α_{opt})	*time*	*ite.*	*time*	*ite.*	*time*	*ite.*	*time*	*ite.*	*time*	*ite.*(β_{opt})	*time*
50	28(32.3)	0.01	80	0.03	141	0.06	79	0.12	3	*	16(3.9)	0.02
100	39(72.9)	0.06	156	0.21	267	0.35	148	0.88	3	0.02	26(4.5)	0.16
200	53(160)	0.34	297	1.86	501	3.29	277	7.92	3	0.09	40(5.1)	1.10
500	79(434)	3.23	685	27.69	1140	45.46	630	132.51	2	0.54	54(5.5)	17.62

Table 1'

	Gaussian Elimination	$Q=I$ Gauss-Seidel		SOR_{opt}	
n	*time*	*ite.*	*time*	*ite.*(ω_{opt})	*time*
50	0.03	146	0.06	27(1.63)	0.02
100	0.23	271	0.36	37(1.73)	0.06
200	1.96	505	3.22	50(1.80)	0.35
500	33.21	1144	45.60	76(1.87)	3.30

表から分かるように，直接法に対しても我々の方法が有効であることが分かる．しかし，実験の中で比較的疎な行列，例えばmodel 問題などに対して$Q=(I+\beta U)$の前処理を用いた場合，最適なβは存在するが良い推定は得られなかった．また，行列の要素を一様乱数によって与えた狭義優対角Z-matrixに対して，$(I+\beta U)$のβの推定による方法は6回の反復で済むという大変良い結果を得た．今後の課題としては実用的な問題に対する有効性を示すことである．

参考文献

[1]A. D. Gunawardena, Modified Iteraive Methods for Consistent Linear Systems, Linear Algebra Appl. 154-156(1991), 123-143.

[2]M. Usui,H. Niki and T. Kohno, Adaptive Gauss-Seidel Method for Linear Systems, Int. J. Compt. Math.,vol.51,(1994),pp.119-125.

[3]H. Kotakemori, H. Niki and N. Okamoto, Accelerated Iterative Method for Z-matrices, J. Compt. Appl. Math.,vol.75,No.1,pp.87-97(1996)

[4]T. Kohno, H. Kotakemori, H. Niki and M. Usui, Improving Modified Gauss-Seidel Method for Z-matrices, Linear Algebra and Its Applications(to appear)